

§ 4.7 Théorème du rang

Rappel / Définition 4.7.1

Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

et $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
 $x \mapsto Ax$

son T.L. associée

Noyau de A = $\text{Ker}(T_A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$
Noyau de T_A

S.E.V


Image de A = $\text{Im}(T_A) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \exists x \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } Ax = y\} \subseteq \mathbb{R}^m$

$Ax = y$

S.E.V


Rem:

$$\text{Im}(A) = \text{Vect}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\} = \text{Col}(A)$$

où $\vec{a}_i$ = la ième colonne de A

Considérons $A^T \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$

(la transposée de A)

alors on a $\underline{\text{Ker}(A^T)} \subseteq \mathbb{R}^m$
↑ noyau de A^T ← S.E.V

et $\text{Col}(A^T) = \text{Im}(A^T) \subseteq \mathbb{R}^n$

mais $\underline{\text{Col}(A^T)} = \text{Vect} \{ \vec{\ell}_1^T, \dots, \vec{\ell}_m^T \}$ ← S.E.V

où ℓ_i = la $i^{\text{ème}}$ ligne de A

Déf : On pose $\text{Lgn}(A) = \text{Col}(A^T) = \text{Im}(A^T)$

4.7.1 = l'espace des lignes de A

On a donc 4 espaces fondamentaux)
pour une matrice A ($m \times n$)

- $\text{Ker}(A)$
- $\text{Ker}(A^T)$
- $\text{Im}(A) = \text{Col}(A)$
- $\text{Im}(A^T) = \text{Lgn}(A)$

Rappel : $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ sont lignes-équival.

si il existe une suite (finie) de matrices
élémentaires $E_1, \dots, E_r \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$

telles qe $B = E_r \dots E_2 E_1 A$

ce qui est équiv. à dire $\exists C \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$
invertible tq $B = C \cdot A$.

Def 4.7.2 : $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

On appelle rang-colonne de A

, noté rg(A), est (rank(A))

la dimension de l'espace des colonnes de A

" " " l'image de A .

cà d $rg(A) = \dim(\text{Im}(A))$ *

On appelle rang-ligne de A , la dimension
de l'espace des lignes de A

noté rg-ligne(A), et comme $lgn(A)$

Def
de rang

$$= \text{Col}(A^T) = \text{Im}(A^T) \quad , \text{ on a qe}$$

$$\boxed{\text{rg-ligne}(A) = \text{rg}(A^T) = \dim(\text{Im}(A^T))}$$

* on a vu qe $\text{rg}(A) = \dim(\text{Im}(A))$
(Thm 4.6.3)

est donc par

$$\text{rg}(A) = \# \text{ colonne-pivots de } A$$

Thm 4.7.3 Théorème du Rang :
(par des matrices)

$$A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

supposons qe A et B soient lignes-équiv.

1) i) $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(B)$

ii) $\text{Lgn}(A) = \text{Lgn}(B)$

iii) Si B est échelonnée et réduite

alors les lignes non-nulles de B
(càd celles qui contiennent 1 pivot)

forment une base de $\text{Lgn}(B)$.

iv) Si B est échel réduite, alors le nombre de colonnes-pivots est égal au nombre de lignes non-nulles de B .

(⚠ Si A et B sont lignes-équivalentes en général on a $\text{Im}(A) \neq \text{Im}(B)$)
par contre

$$2) \quad \text{rg}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \dim(\text{Im}(A)) = \dim(\text{Im}(B)) \\ \parallel \\ \text{rg}(B)$$

$$3) \quad \text{rg}(A) \stackrel{\diamond}{=} \text{rg}(A^T)$$

et donc $\dim(\text{Col}(A)) = \dim(\text{Lgn}(A))$

et ce nombre est égal au nombre de pivots (r) de n'importe quelle forme échelonnée de A .

et on a l'égalité suivante



$$\text{rg}(A) + \dim(\text{Ker}(A)) = n$$

colonnes
pivot

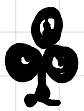
variables libres
= # colonnes non pivot

nombre
de
colonnes

et pour A^T on obtient

$$\text{rg}(A^T) + \dim(\text{Ker}(A^T)) = m$$

ou encore $\text{rg}(A) + \dim(\text{Ker}(A^T)) = m$



$$\dim(\text{Im}(A)) + \dim(\text{Ker}(A)) = \dim(\mathbb{R}^n)$$

pour $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$

Fin 4.7.3

Ex. 4.7.4 :

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1/2 & -4 & \pi \\ 2 & 4 & -2 & 1 & -8 & 2\pi \\ 3 & 6 & -3 & 3/2 & -12 & 3\pi \end{pmatrix}_{3 \times 6}$$

$\text{rg}(A) = 1$ car toutes les colonnes
sont proportionnelles

$$\text{Col}(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{array}{l} \text{TdR} \\ \Rightarrow \end{array} \dim(\text{Ker}(A)) + \underbrace{\text{rg}(A)}_1 = 6$$

$$\dim(\text{Ker}(A)) = 5 \quad (\text{sans calcul})$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 10 & 13 & 16 \\ 11 & 14 & 17 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{6 \times 3}$$

$$T_A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^6$$

TdR $\Rightarrow$ pour A $\dim(\text{Ker}(A)) + \text{rg}(A) = 3 \quad 1)$

pour A^T $\dim(\text{Ker}(A^T)) + \text{rg}(A^T) = 6 \quad 2)$

or A possède 3 pivots

donc $\text{rg}(A) = 3 \xrightarrow{\text{TdR}} \text{rg}(A^T)$

1) $\Rightarrow \dim(\text{Ker}(A)) = 0 \Rightarrow \text{Ker}(A) = \{0\}$

donc A est injective

(pas surjective)

2) $\Rightarrow \dim(\text{Ker}(A^T)) = 3 \Rightarrow A^T$ n'est pas injective

A^T est surjective

Corollaire 4.7.5 : Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

Alors

1) A est surjective $\Leftrightarrow A^T$ est injective

2) A^T est surjective $\Leftrightarrow A$ est injective

(prendre A^T dans 1))

dém : supposons A^T injective, par un thm du cours,
1) cela équivaut à dire que $\text{Ker}(A^T) = \{0\}$

$$\Rightarrow \dim(\text{Ker}(A^T)) = 0$$

$$\stackrel{\text{TdR}}{\Rightarrow} m = \underbrace{\dim(\text{Ker}(A^T))}_{=0} + \underbrace{\dim(\text{Im}(A^T))}_{\text{rg}(A^T)}^m$$

$$\text{or } \text{rg}(A) = \text{rg}(A^T), \text{ donc } \text{rg}(A) = m$$

$$\text{or } \text{rg}(A) = \dim(\text{Im}(A))$$

$$\Rightarrow \dim(\text{Im}(A)) = m \Rightarrow$$

$$\text{Im}(A) \subseteq \mathbb{R}^m$$

$$\Rightarrow \text{Im}(A) = \mathbb{R}^m$$

$$\Rightarrow A \text{ est surjective. (cqd)} \Leftarrow$$

Réciproquement : supposons A surjective

$$\Leftrightarrow \text{Im}(A) = \mathbb{R}^m \quad (\text{Im}(A) \subseteq \mathbb{R}^m)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\dim(\text{Im}(A))}_{\text{rg}(A)} = m$$

TdR : $\text{rg}(A^T) + \dim(\text{Ker}(A^T)) = m$
 $\quad \quad \quad \parallel$
 $\quad \quad \quad \text{rg}(A)$

$$\Rightarrow \dim(\text{Ker}(A^T)) = 0 \Rightarrow \text{Ker}(A^T) = \{0\}$$

$$\Leftrightarrow A^T \text{ est injective (cqd corollaire).}$$

TdR $\Rightarrow$

Rajout au Nèga-Théorème : 4.7.6

Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, alors A est inversible $\Leftrightarrow$

p) les colonnes de A forment une base de $\mathbb{R}^n$

q) $\text{rg}(A) = n$ (le rang de A est maximal)

r) $\dim(\text{Ker}(A)) = 0$

Thm 4.7.7 (TdR pour des esp. vectoriels)

Soient V, W des espaces vectoriels (de dimension finie ou pas)
et $T: V \rightarrow W$ une transfo linéaire, alors

$$\dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = \dim(V)$$

↑
nullity of T

↑
 $\text{rg}(T)$
rank(T)

(dém sur demande)

Ex 4.7.8 : $V = M_{n \times n}(\mathbb{R})$ $W = \mathbb{R}$

$\text{Tr} : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ la transfo
 $A \mapsto \text{Tr}(A)$ trace

où $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} =$ somme des coeff.
diagonaux de A

ex : $\begin{cases} \text{Tr}(A+B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B) \\ \text{Tr}(\lambda A) = \lambda \text{Tr}(A) \end{cases} \Rightarrow$ c'est
une T.L.

IdR : $\dim(\text{Ker}(\text{Tr})) + \dim(\text{Im}(\text{Tr})) =$
 $\dim(M_{n \times n}(\mathbb{R}))$

or $\dim(M_{n \times n}(\mathbb{R})) = n^2$

et $\text{Im}(\text{Tr}) = \mathbb{R}$ (car $\forall a \in \mathbb{R}$
 $\text{Tr}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a$)

Tr est surjective donc $\text{rg}(\text{Tr}) = 1$

$$\Rightarrow \dim(\ker(T)) = n^2 - 1.$$

$$2) \mathbb{P}_3 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^3$$

T est linéaire
(exercice)

$$p(t) \mapsto \begin{pmatrix} p(0) \\ p'(0) \\ p''(0) \end{pmatrix}$$

$$\ker(T) = \left\{ p(t) \in \mathbb{P}_3 \mid \begin{array}{l} p(0) = 0 \\ p'(0) = 0 \\ p''(0) = 0 \end{array} \right\}$$

$$p(t) \in \ker(T)$$

$$\uparrow$$

$$\mathbb{P}_3$$

$$p(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$

$$a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

$$p(t) \in \ker(T) \Rightarrow p(0) = 0 \Rightarrow d = 0$$

$$p'(t) = 3at^2 + 2bt + c \quad p'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$p''(t) = 6at + 2b \quad p''(0) = 0 \Rightarrow b = 0$$

et on voit / vérifie que $t^3 \in \ker(T)$

$$\text{et qe } \text{Ker}(T) = \text{Vect} \{t^3\} = \{\lambda t^3 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{donc } \dim(\text{Ker}(T)) = 1$$

$$\underline{\text{TdR}} : \underbrace{\dim(\mathbb{P}_3)}_4 = \underbrace{\dim(\text{Ker}(T))}_1 + \underbrace{\dim(\text{Im}(T))}_{\Rightarrow 3}$$

$$\text{donc } \dim(\text{Im}(T)) = 3$$

$$\text{or } \text{Im}(T) \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$\Rightarrow \text{Im}(T) = \mathbb{R}^3 \Rightarrow T \text{ surjective}$$

$$3) S : \mathbb{P}_3 \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

$$p(t) \mapsto \begin{pmatrix} p(0) & p(0)+p(1) \\ p(0)+p(1) & p(1) \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

(exo
S est
linéaire)

$$\text{Im}(S) = ?$$

$$\text{Ker}(S) = ?$$

$\text{Im}(S)$:

$$S(p(t)) = \begin{pmatrix} p(0) & p(0)+p(1) \\ p(0)+p(1) & p(1) \end{pmatrix}$$

$$= p(0) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\pi_1} + p(1) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\pi_2}$$

donc $\text{Im}(S) \subseteq \text{Vect}\{\pi_1, \pi_2\} \subset \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$

de plus, si $a, b \in \mathbb{R}$

alors en posant $p(t) = (b-a)t + a$

$$\begin{array}{c} \text{alors } p(0) \rightarrow \\ S(p(t)) = \begin{pmatrix} a & a+b \\ a+b & b \end{pmatrix} = a\pi_1 + b\pi_2 \\ \quad \quad \quad \uparrow \\ \quad \quad \quad p(1) \end{array}$$

donc $\text{Im}(S) = \text{Vect}\{\pi_1, \pi_2\}$

de plus π_1 et π_2 sont lin. indépend.

dens $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

$$\Rightarrow \dim(\operatorname{Im}(S)) = 2.$$

TdR: $4 = \dim(P_3) = \dim(\operatorname{Ker}(S)) + \underbrace{\operatorname{rg}(S)}_2$

$$\Rightarrow \dim(\operatorname{Ker}(S)) = 2$$

Fin ex. 4.7-8.

§ 4.8 Matrice d'une application linéaire selon des bases

Def 4.8.1 : Soient $T: V \rightarrow W$
(une T.L. entre esp. vectoriels)

$B = (b_1, \dots, b_n)$ une base de V
ordonnée ($\dim(V) = n$)

$\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$ une base de W
ordonnée ($\dim(W) = m$)

on définit la matrice de T par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ comme étant $[T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$

$$[T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \left(\underbrace{[T(b_1)]_{\mathcal{C}}}_{\substack{\text{1ère} \\ \text{colonne}}} \mid \underbrace{[T(b_2)]_{\mathcal{C}}}_{\text{2ème}} \mid \dots \mid \underbrace{[T(b_n)]_{\mathcal{C}}}_{\substack{\text{nème} \\ \text{colonne}}} \right) \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$T(b_i) \in W$
exprimé dans la base $\mathcal{C}$

$$[T(b_i)]_{\mathcal{C}} \in \mathbb{R}^m$$

utilité : la seringue prochaine